目录

第一章 集合与函数概念

1.1 集合

要点回顾

定义：一些元素（研究对象）组成的总体叫做集合。

特征：确定性、互异性、无序性.

表示法：列举法{1,2,3,…}、描述法{x|P}、韦恩图

数集：自然数集 N、整数集 Z、有理数集 Q、实数集 R、正整数集 N^*、空集 φ.

关系：属于∈、不属于∉、包含于⊆(或⊂)、真包含于⊊、集合相等＝.

运算：交运算 A∩B＝{x|x∈A 且 x∈B}；

并运算 A∪B＝{x|x∈A 或 x∈B}；

补运算 $C_U A$＝{x|x∉A 且 x∈U}，U 为全集

性质：A⊆A； φ⊆A； 若 A⊆B，B⊆C，则 A⊆C； A∩A＝A∪A＝A； A∩φ＝φ；

A∪φ＝A； A∩B＝A⇔A∪B＝B⇔A⊆B；

子集：若 A⊆B，则称 A 是 B 的子集。若集合 A 中有 n$(n\in N)$个元素，则集合 A 的所有不同的子集个数为

2^n，所有真子集的个数是2^n-1，所有非空真子集的个数是2^n-2。

基础训练

1、下列四个关系式中，正确的是（ ）.

A. $\varnothing\in\{a\}$ B. $a\notin\{a\}$ C. $\{a\}\in\{a,b\}$ D. $a\in\{a,b\}$

2．集合$M=\{1,2,3,4,5\}$的子集个数是（ ）

A．32 B．31 C．16 D．15

3．满足条件$\phi\subsetneqq M\subsetneqq\{0,1,2\}$的集合共有（ ）

A．3 个 B．6 个 C．7 个 D．8 个

4．已知全集$U=\{1,2,3,4,5,6\}$,集合$A=\{1,2,5\}$,$C_U B=\{4,5,6\}$,则$A\cap B=$（ ）

A．{1，2} B．{5} C．{1，2，3} D．{3，4，6}

5、设集合$U=\{1,2,3,4\}$，$A=\{1,2\}$，$B=\{2,4\}$，则$\complement_U(A\cup B)=$（ ）

A．$\{2\}$ B．$\{3\}$ C．$\{1,2,4\}$ D．$\{1,4\}$

6、设$M=\{x|-2\le x\le 2\}$，$N=\{x|x<1\}$，则$M\cap N$等于 （ ）

A. $\{x|1<x<2\}$ B. $\{x|-2<x<1\}$ C. $\{x|1<x\le 2\}$ D. $\{x|-2\le x<1\}$

7、已知$U=\mathbf{R}$，$A=\{x\,|\,x>0\}$，$B=\{x\,|\,x\leqslant -1\}$，则$(A\cap\complement_U B)\cup(B\cap\complement_U A)=$（ ）

A．$\varnothing$ B．$\{x\,|\,x\leqslant 0\}$ C．$\{x\,|\,x>-1\}$ D．$\{x\,|\,x>0或x\leqslant -1\}$

8、集合 M={x| $y=\sqrt{x-2}$ }， N={y| $y=x^2+1$ }，则 M∩N 等于　　（　　）

A. $[2,+\infty)$；B. $[1,+\infty)$；　C. ϕ ；　D. R。

9、已知集合 $A=\{x\,|\,a-1\le x<a+2\}$， $B=\{x\,|\,3<x\le 5\}$，若 $B\subseteq A$ ，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\{a\,|\,3<a\le 4\}$　B. $\{a\,|\,3\le a\le 4\}$　C. $\{a\,|\,3\le a<4\}$　D. $\{a\,|\,3<a<4\}$

10、已知集合 $M=\{x\,|\,-1\le x<2\},N=\{x\,|\,x\le a\}$,若$M\cap N\ne\phi$，那么 a 的取值范围是 （　）

A. $(-\infty,2]$　　B. $(-1,+\infty)$　　C. $[-1,+\infty)$　　D. [－1，2]

11、已知集合 $P=\{x\,|\,x^2=1\}$，集合 $Q=\{x\,|\,ax=1\}$，若 $Q\subseteq P$，那么 a 的值是（　　）

（A）1　　（B）-1　　（C）1 或-1　　（D）0，1 或-1

12、设三元集合 $\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}=\left\{a^2,a+b,0\right\}$，则 $a^{2014}+b^{2015}=$__________ .

13、若全集 U=R，填写下表：

A	B	$A\cap B$	$A\cup B$	C_UA
$\{x\,|\,x\le 1\}$	$\{x\,|\,x\le 2\}$			
$\{x\,|\,x\ge 1\}$	$\{x\,|\,x\ge 2\}$			
$\{x\,|\,x\ge 1\}$	$\{x\,|\,x\le 2\}$			
$\{x\,|\,x\le 1\}$	$\{x\,|\,x\ge 2\}$			
$\{x\,|\,1<x<4\}$	$\{x\,|\,2<x<3\}$			
$\{x\,|\,1<x<4\}$	$\{x\,|\,x<2或x>3\}$			
$\{x\,|\,x<1或x>4\}$	$\{x\,|\,x<2或x>3\}$			

14、填写空格中 a 的取值范围：

A	B	$A\cap B=\varnothing$	$A\cup B=$R
$\{x\,|\,x\le 1\}$	$\{x\,|\,x\ge a\}$		
$\{x\,|\,x\le 1\}$	$\{x\,|\,x>a\}$		
$\{x\,|\,x<1\}$	$\{x\,|\,x\ge a\}$		
$\{x\,|\,x<1\}$	$\{x\,|\,x>a\}$		

15、填写空格中 a 的取值范围：

A	B	$A\subseteq B$	$B\subseteq A$
$\{x\,|\,x\le 1\}$	$\{x\,|\,x\le a\}$		
$\{x\,|\,x\le 1\}$	$\{x\,|\,x<a\}$		
$\{x\,|\,x<1\}$	$\{x\,|\,x\le a\}$		
$\{x\,|\,x<1\}$	$\{x\,|\,x<a\}$		

16、已知集合 A={x|1≤x≤2},B={x|1≤x≤a,a≥1}..

(1)若 A$\subsetneqq$B,求 a 的取值范围.

(2)若 B$\subseteq$A,求 a 的取值范围.

17、已知集合 $A=\{x|-2<x<3\}$，$B=\{x|m<x<m+9\}$

（1）若 $A\bigcup B=B$，求实数 m 的取值集合;

（2）若 $A\bigcap B=B$，求实数 m 的取值集合;

（3）若 $A\bigcap B\neq\varnothing$，求实数 m 的取值集合。

能力提升

1、已知 A={－4,2a－1,a^2},B={a－5,1－a,9}且 A∩B={9},则 a 的值为（　　）

A．5　　B．3　　C．-3　　D．5 或±3

2、满足{1，2，3} $\subsetneqq$ M $\subsetneqq$ {1，2，3，4，5，6}的集合 M 的个数是　　（　　）

A．8　　B．7　　C．6　　D．5

3、设集合 $A=\{1,2\}$,则满足 $A\cup B=\{1,2,3\}$ 的集合 B 的个数是（　）

(A)1　(B)3　(C)4　(D)8

4、使集合 M={$x|ax^2+2x+a=0,a\in\mathbf{R}$}中有且只有一个元素的所有 a 的值组成的集合 N 的子集个数为（　　）

A．2　　B．4　　C．7　　D．8

5．设全集 U={1，2，3，4，5，6}，集合 A，B 都是 U 的子集，若 A∩B={1，3，5}，则称 A，B 为“理想配集”，记作（A，B），这样的“理想配集”（A，B）共有　（　　）

A．7 对　　B．8 对　　C．27 对　　D．28 对

6、已知集合 M＝｛x| $y=2+\sqrt{-x^2+4x+12}$，x∈R｝，N＝｛y| $y=2+\sqrt{-x^2+4x+12}$，x∈R｝，则 M∩N＝（　　）

A．∅　B. [-2,2]　C.[2,6]　D. [-2,6]

7、已知集合 $M=\{(x,y)\,|\,x+y=3\},N=\{(x,y)\,|\,x-2y-6=0\}$,则$M\bigcap N$为　　（　　）

A．$x=4,y=-1$　B．（4，－1）　C．{4，－1}　D．{（4，－1）}

8、已知集合 $M=\{0,1,2\},N=\{x\,|\,x=2a,a\in M\}$，则集合 $M\cap N$＝（　　）

A．{0}　　B．{0，1}　　C．{1，2}　　D．{0，2}

9、已知集合 $A=\{x\,\big|\,|x|\le 2,x\in R\}$，$B=\{x\,|\,\sqrt{x}\le 4,x\in Z\}$,则 $A\cap B=$

(A)(0,2)　　(B)[0,2]　　(C){0,2}　　(D){0,1,2}

10、设 A={x|x^2+4x=0},B={x|x^2+2(a+1)x+a^2－1=0} ,A∩B=B, 求实数 a 的值.

11、已知 M={x| −2≤x≤5}, N={x| a+1≤x≤2a−1}.

（Ⅰ）若 M⊆N，求实数 a 的取值范围；

（Ⅱ）若 M⊇N，求实数 a 的取值范围.

1.2 函数及其表示

要点回顾

1、函数的定义：设 A、B 是非空的数集，如果按某个确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应，那么就称 f:$A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记作 $y=f(x)$，$x\in A$，其中 x 叫做自变量.x 的取值范围 A 叫做函数的定义域；与 x 的值相对应的 y 的值叫做函数值，函数值的集合 $\{f(x)\ |x\in A\}$ 叫做函数的值域.

2、函数的三要素：定义域 A、值域 C 和对应法则 f.

3、函数的三种表示法：(1) 解析法；(2) 列表法；(3) 图象法。

4、两个函数相等：当且仅当两个函数的定义域和对应法则都分别相同时，这两个函数才是同一个函数.

5、映射的定义：一般地，设 A、B 是两个集合，如果按照某种对应关系 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，那么，这样的对应（包括集合 A、B，以及集合 A 到集合 B 的对应关系 f）叫做集合 A 到集合 B 的映射，记作 f:$A\to$B.

由映射和函数的定义可知，函数是一类特殊的映射，它要求 A、B 非空且皆为数集.

基础训练

1、下列各组函数中的 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同一函数的是(　　)

(A) $f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=\sqrt[3]{x^3}$；

(B) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，$g(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0,\\ -1 & x<0;\end{cases}$

(C) $f(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$，$f(x)=\sqrt{(x+1)(x-1)}$；

(D) $f(x)=x^2-2x-1$，$g(t)=t^2-2t-1$.

2、已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 分别由下表给出

x	1	2	3
$f(x)$	2	1	1

x	1	2	3
$g(x)$	3	2	1

则 $f[g(1)]$ 的值为________________；当 $g[f(x)]=2$ 时，$x=$______________.

3、已知函数 $f(x)=2x+1(1\le x\le 3)$，则(　　).

A．$f(x-1)=2x+2(0\leqslant x\leqslant 2)$；　B．$f(x-1)=2x-1(2\leqslant x\leqslant 4)$

C．$f(x-1)=2x-2(0\leqslant x\leqslant 2)$；　D．$f(x-1)=-2x+1(2\leqslant x\leqslant 4)$

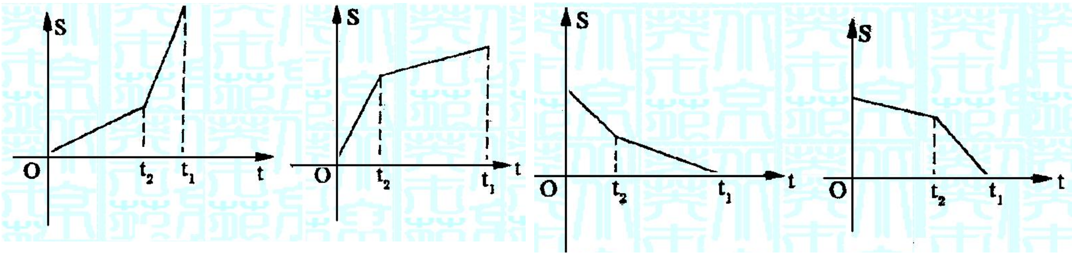
4、若 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x}{1-x}$，则当 $x\neq 0$ 且 $x\neq 1$ 时，$f(x)=$(　　).

A．$\dfrac{1}{x}$　　B．$\dfrac{1}{x-1}$；　C．$\dfrac{1}{1-x}$；　D．$\dfrac{1}{x}-1$

5、设函数 $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\leqslant 1,\\ x^2+x-2, & x>1,\end{cases}$ 则 $f\left(\dfrac{1}{f(2)}\right)$ 的值为（　　）

A．$\dfrac{15}{16}$；　B．$-\dfrac{27}{16}$；　C．$\dfrac{8}{9}$；　D．18

6、李刚从家到学校共需 t_1 分钟，开始时步行，经 $t_2(0<t_2<t_1)$ 分钟后由走改为跑，走的过程和跑的过程均是匀速的，速度分别为 υ_1、υ_2 且 $0<\upsilon_1<\upsilon_2$，则下图表示李刚与学校的距离 S 关于时间 t 的函数图象正确的是　　　　（　　）



A.　　　　B.　　　　C.　　　　D.

7、求下列函数的定义域：

（1）$f(x)=\dfrac{1}{x-2}$；　（2）$f(x)=\sqrt{3x+2}$；　（3）$f(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$.

8、已知函数 $f(x)=x^2+2x\quad(-2\le x\le 1$ 且 $x\in Z)$，则 $f\left(x\right)$ 的值域是　　（　　）

A. $\left[0,3\right]$　　B. $\left[-1,3\right]$　　C. $\left\{0,1,3\right\}$　　D. $\left\{-1,0,3\right\}$

9、已知函数 $y=x^2-2x-3$，分别求它在下列区间上的值域。

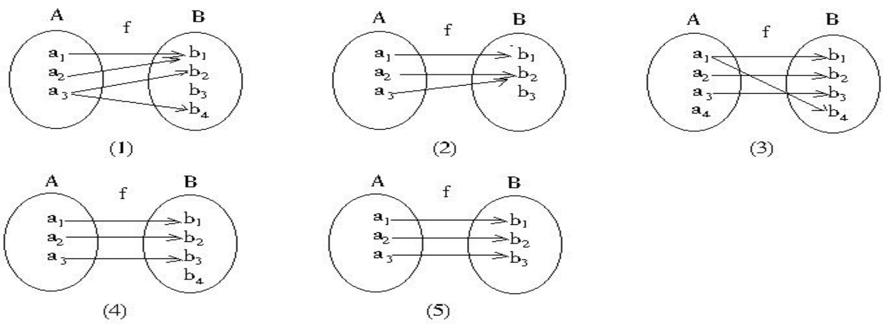
（1）$x\in R$；　（2）$x\in[-2,2]$；　（3）$x\in[0,4]$；　（4）$x\in[2,4]$.

10、画出下列函数的图像：

（1）$f(x)=\left|x-1\right|$；（2）$f(x)=\left|x^2-2x-3\right|$

能力提升

1．在下列各对应关系中，是从 A 到 B 的映射的有　　　　　　　　　　　　（　　　）



A．(1)(3)(4)　　　　　B．(2)(3)(5)　　　　C．(1)(2)(4)(5)　　　　D．(2)(4)(5)

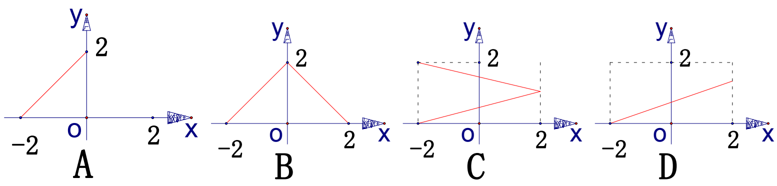
2．已知集合 A={a，b，c}，集合 B={r，s，t}，映射 f：A→B，且满足 a 的象是 t，则这样的映射有（　）

A．2 个　　　　　　B．4 个　　　　　　C．8 个　　　　　　D．9 个

3．已知映射 $f:A\to B,$ 其中 A=B=R，对应法则为：$f:x\to y=x^2+2x+3$，若对实数 $k\in B$，在集合 A 中不存在原象，则 k 的取值范围是（ B ）

A、$(-\infty,0)$；B、$(-\infty,2)$；C、$(2,+\infty)$；D、$(3,+\infty)$。

4、设 $M=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，$N=\{y|0\leqslant y\leqslant 2\}$，函数 $f(x)$ 的定义域为 M，值域为 N，则 $f(x)$ 的图象可以是



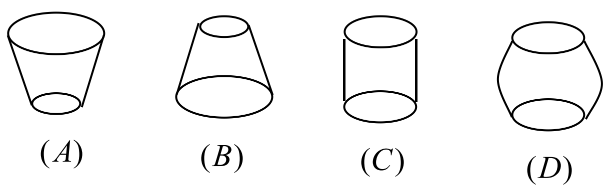
5、已知函数 $y=f(x)$，则该函数与直线 $x=a$ 的交点个数有（　　）

A．1 个　　　　B．2 个　　　　C．无数个　　　　D．至多一个

6、已知函数 $y=x^2-2x+3$在当$x\in[0,m]$时的最大值 3，最小值 2，则 m 的取值范围是（ A）

A、[1，2]　　　　B、[－2，－1]　　C、$[1,+\infty)$　　　　　　D、$(-\infty,-1]$

7、如下图所示，向高为 H 的水瓶 A,B,C,D 同时以等速注水，注满为止；

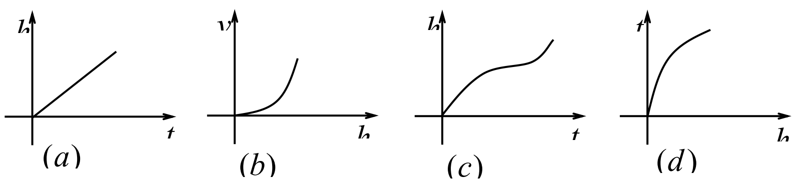


（1）若水深 h 与注水时间 t 的函数图象是下图中的 a，则水瓶的形状是___；

（2）若水量 v 与水深 h 的函数图像是下图中的 b，则水瓶的形状是______；

（3）若水深 h 与注水时间 t 的函数图象是下图中的 c，则水瓶的形状是__；

（4）若注水时间 t 与水深 h 的函数图象是下图中的 d，则水瓶的形状是_.



8、函数 f(x)的定义域为[0,2],则函数 f(x^2)的定义域是（　）

A．[－2,2]　　B．$[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$　C．[0,2]　　D．[0,4]

9、已知 $y=f(x-1)$ 的定义域为$[1,2]$]，则 $y=f(x)$ 的定义域为（　　）

A、$\left[0,1\right]$；**B**、$\left[1,2\right]$；**C**、$[2,3]$；**D**、$\left[3,4\right]$；

10、已知 $y=f(x+1)$ 的定义域为$[1,2]$]，则 $f(x-3)$ 的定义域是(　　)

A、$\left[2,3\right]$；**B**、$\left[5,6\right]$；**C**、$\left[0,1\right]$；**D**、$\left[3,4\right]$；

11、已知函数 $y=f(x)$ 的值域是[1，4]，则 $y=f(x-1)$ 的值域是（　　　）

A．[1，4]　B．$[1,5]$　C．$[0,3]$　D．[2，5]

12、已知函数 f（x）=$\begin{cases}2x, & x>0,\\ x+1, & x\le 0\end{cases}$。若 f(a)+f(1)=0,则实数 a 的值等于

A. -3　B. -1　C. 1　D. 3

13、设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x-1, (x\ge 0),\\ \frac{1}{x} \quad (x<0).\end{cases}$ 若$f(a)>a$. 则实数 a 的取值范围是_______.

14、若函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x-3 & ,x\ge 5\\ f\left(x+2\right), & x<5\end{cases}$,则 $f\left(2\right)$ 的值为（　　）

A.2　B.3　C.4　D.5

15、对任意实数 x 规定 y 取 $4-x, x+1, \frac{1}{2}(5-x)$ 三个值中的最小值，则函数 y（　）

A．有最大值 2，最小值 1，　　B．有最大值 2，无最小值，

C．有最大值 1，无最小值，　　D．无最大值，无最小值。

16、根据下列条件，分别求出函数的解析式

（1）已知 $f(x)=x^2-4x+3$，求 $f(x+1)$；

（2）已知 $f(x+1)=x^2-2x$，求 $f(x)$.

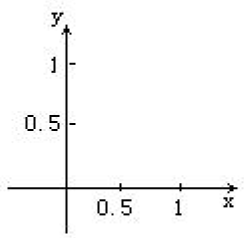
（3）已知$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，求$f\left(x\right)$

（4）已知函数$f(x)$满足$2f(x)+3f(-x)=x^2+x$，则$f(x)=$____________.

15、已知$f(x)=\begin{cases} f_1(x), x\in\left[0,\frac{1}{2}\right) \\ f_2(x), x\in\left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$，其中$f_1(x)=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1, f_2(x)=-2x+2$

(1)在下面坐标系上画出$y=f(x)$的图象

(2)若$x_0\in[0,\frac{1}{2}), x_1=f(x_0), f(x_1)=x_0$，求$x_0$.



1.3 函数的基本性质

要点回顾

1、单调性：一般地,设函数 $f(x)$ 的定义域为 I：

（1）对任意 $x_1,x_2\in M\subseteq I$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是**增函数.**

注：$f(x)$ 是增函数 $\Leftrightarrow (x_1-x_2)\left(f(x_1)-f(x_2)\right)>0\Leftrightarrow \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$

（2）对任意 $x_1,x_2\in M\subseteq I$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是**减函数.**

注：$f(x)$ 是减函数 $\Leftrightarrow (x_1-x_2)\left(f(x_1)-f(x_2)\right)<0\Leftrightarrow \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$

（3）证明函数单调性的方法:

①设 $x_1,x_2\in A$ 且 $x_1<x_2$；②作差 $f(x_1)-f(x_2)$（一般结果要分解为若干个因式的乘积，且每一个因式的正或负号能清楚地判断出）；③判断正负号;④结论。

2、奇偶性：

(1) $\left.\begin{array}{l}\text{f(x)的定义域关于原点对称}\\ \text{对}\forall x\in\text{定义域, 都有} f(-x)=-f(x)\text{或}f(-x)+f(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{函数}f(x)\text{是奇函数.}$

(2) $\left.\begin{array}{l}\text{f(x)的定义域关于原点对称}\\ \text{对}\forall x\in\text{定义域, 都有} f(-x)=f(x)\text{或}f(-x)-f(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{函数}f(x)\text{是偶函数.}$

3、奇函数的图象关于原点对称（图象过原点或 f(0)无意义)；偶函数的图象关于 y 轴对称.

基础训练

1、下列函数中,在区间(0,2)内为增函数的是（　　）

A． y =－x+1；　B． y= $\sqrt{x}$ ；　C． y = x^2－4x+5 ；　D． y=－x^2+2x

2、函数 $f(x)=|x|$ 和 $g(x)=x(2-x)$ 的递增区间依次是　　（　　）

A． $(-\infty,0],(-\infty,1]$　B． $(-\infty,0],[1,+\infty)$　C． $[0,+\infty),(-\infty,1]$　D $[0,+\infty),[1,+\infty)$

3、已知函数 f(x) =x^2+2(a－1)x+2 在区间 $\left(-\infty,4\right]$ 上是减函数,则实数 a 的取值范围是（　　）

A．a≤－3　　B．a≥－3　　C．a≤5　　D．a≥3

4、判断下列函数的单调性，并证明。

（1） $y=\dfrac{x+1}{x-1}(x>1)$；　　（2） $y=x+\dfrac{1}{x}(0<x<1)$；

（3） $y=\frac{x}{x^2+1}(x>1)$；　　（4） $y=\sqrt{x}(x\ge 0)$.

（5） $y=x^2-\frac{1}{x}(x>0)$

5、判断下列函数的奇偶性：

（1） $f(x)=x^3+x$；　　（2） $f(x)=2x^4+3x^2+4$

（3） $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}$；　　（4） $f(x)=3x+1$

6、已知函数 $f(x)=a-\frac{1}{2^x+1}$，若 f（x）为奇函数，则 $a=$______________.

7、若函数 $f(x)=\frac{x}{(2x+1)(x-a)}$ 为奇函数，则 a=（　　）

A. $\frac{1}{2}$　；B. $\frac{2}{3}$　；C. $\frac{3}{4}$　；D. 1。

8、 已知 $f(x)=ax^2+bx+3a+b$ 是偶函数，定义域为 $[a-1,2a]$. 则 a， b 的值分别是（　　）

A. $\frac{1}{3},0$　　B. $-\frac{1}{3},0$　　C. $-1,0$　　D. $-1,1$

9、设 $f(x),g(x)$ 都是单调函数，有如下四个命题：

①若 $f(x)$单调递增, $g(x)$单调递增, 则$f(x)-g(x)$单调递增;

②若 $f(x)$单调递增, $g(x)$单调递减, 则$f(x)-g(x)$单调递增;

③若 $f(x)$单调递减, $g(x)$单调递增, 则$f(x)-g(x)$单调递减;

④若 $f(x)$单调递减, $g(x)$单调递减, 则$f(x)-g(x)$单调递减;

其中,正确的命题是

（A）①③　　（B）①④　　（C）②③　　（D）②④

10、设函数 $f(x)$ 和 g(x)分别是 R 上的偶函数和奇函数，则下列结论恒成立的是（　）

A. $f(x)+|g(x)|$是偶函数　　B. $f(x)-|g(x)|$是奇函数

C. $|f(x)|+g(x)$是偶函数　　D. $|f(x)|-g(x)$是奇函数

11、（2006 辽宁文）设 $f(x)$ 是 **R** 上的任意函数，下列叙述正确的是（　　）

A．$f(x)f(-x)$ 是奇函数　　B．$f(x)|f(-x)|$ 是奇函数

C．$f(x)+f(-x)$ 是偶函数　　D．$f(x)-f(-x)$ 是偶函数

12、已知 $f(x)=x^5-ax^3+bx+2$ 且 $f(-5)=17$，则 $f(5)$ 的值为（　　　）

A．19　　B．13　　C．－19　　D．－13

13、已知函数 f(x)是奇函数,当 x>0 时，f(x)= x－1,则 f(x)<0 的解集为（　　）

A．(－∞,0)　　B．(－∞,1)

C．(－1,0)∪(1,+∞)　　D．(－∞,－1)∪(0,1)

14、若函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，在 $(-\infty,0]$ 上是减函数，且 $f(2)=0$，则使得 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,2)$　　B．$(2,+\infty)$　　C．$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ D．（－2，2）

15、若函数 $f(x)$ 是奇函数，且在（$0,+\infty$），内是增函数，$f(-3)=0$，则不等式 $x\cdot f(x)<0$ 的解集为（　　）

A．$\{x\,|-3<x<0\text{或}x>3\}$　　B．$\{x\,|\,x<-3\text{或}0<x<3\}$

C．$\{x\,|\,x<-3\text{或}x>3\}$　　D．$\{x\,|-3<x<0\text{或}0<x<3\}$

16．已知函数 $y=f(x)$ 是偶函数，且 $y=f(x)$在$[-2,0]$ 上是单调减函数，则　　（　）

A．$f(0)<f(-1)<f(2)$　　B．$f(-1)<f(0)<f(2)$

C．$f(-1)<f(2)<f(0)$　　D．$f(2)<f(-1)<f(0)$

17、已知 $f(x)$是定义在 R 上的偶函数，且在[0，+∞) 上是单调递增函数，若 $f(x_1)>f(x_2)$，则下列结论一定成立的是（　　）

A．$x_1>x_2$　　B．$x_1+x_2>0$　　C．$x_1<x_2$　　D．$|x_1|>|x_2|$

18、$f(x)$为R上的奇函数，当$x>0$时，$f(x)=-2x^2+3x+1$，求$f(x)$的解析式。

19、已知函数$f(x)=\dfrac{ax+b}{1+x^2}$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，且$f(1)=1$。

（1）求函数$f(x)$的解析式；

（2）用单调性的定义证明$f(x)$在$(1,+\infty)$上减函数；

（3）求函数在$\left[2,4\right]$上的最大值和最小值。

20、（1）定义在$(-1,1)$上的奇函数$f(x)$为减函数，且$f(3-2a)+f(a-2)>0$，求实数a的取值范围。

(2) 定义在$[-2,2]$上的偶函数$g(x)$，当$x\geq 0$时，$g(x)$为减函数，若$g(1-m)<g(m)$成立，求m的取值范围。

能力提升

1．若函数 $y=f(x)(x\in R)$ 是奇函数，则下列坐标表示的点一定在函数 $y=f(x)$ 图象上的是　（　　）

A．$(a,-f(a))$　　B．$(-a,-f(a))$　　C．$(-a,-f(-a))$　　D．$(a,f(-a))$

2、定义在 R 上的奇函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$ 上是增函数，且 $f(1)=0,$ 则满足 $(x-2)f(x)<0$ 的 x 的取值范围是　（　　）

A.（－1，0）∪（1，2）　　B.（－1，0）∪（1，+∞）

C.（－∞，－1）∪（1，2）　　D.（－1，0）∪（0，1）

3、已知定义域为 R 的函数 f(x)在 $(8,+\infty)$ 上为减函数，且函数 y=f(x+8)为偶函数，则（　）

A.f(6)>f(7)　　B.f(6)>f(9)　　C.f(7)>f(9)　　D.f(7)>f(10)

4．已知函数 $y=f(x)$ 是偶函数，且 $y=f(x-2)$在$[0,2]$ 上是单调减函数，则　（　）

A．$f(0)<f(-1)<f(2)$　　B．$f(-1)<f(0)<f(2)$

C．$f(-1)<f(2)<f(0)$　　D．$f(2)<f(-1)<f(0)$

5. 已知 $f(x)$ 是偶函数，$x\in R$，当 $x>0$ 时，$f(x)$ 为增函数，若 $x_1<0,x_2>0$，且 $|x_1|<|x_2|$，则（　　）

A. $f(-x_1)>f(-x_2)$　　B. $f(-x_1)<f(-x_2)$

C. $-f(x_1)>f(-x_2)$　　D. $-f(x_1)<f(-x_2)$

6、定义在 R 上的奇函数 $f(x)$，对任意两个不相等的实数 a,b,总有 $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$<0 成立，设 $x_1+x_2<0$，则给出下列不等式

① $f(x_1)\cdot f(-x_1)\le 0$；　　② $f(x_2)\cdot f(-x_2)>0$

③ $f(x_1)+f(x_2)\le f(-x_1)+f(-x_2)$；④ $f(x_1)+f(x_2)>f(-x_1)+f(-x_2)$

其中正确的不等式序号是（　　）

A．①②　　B．①④　　C．②④　　D．①③

7．定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足下列三个关系：①对任意 $x\in R$ 都有 $f(x+4)=f(x)$；

②对任意 $0\le x_1\le x_2\le 2$ 都有 $f(x_1)<f(x_2)$；③ $y=f(x+2)$ 的图象关于 y 轴对称.

则下列关系成立的是（　　）

A．$f(4.5)<f(6.5)<f(7)$　　B．$f(6.5)<f(4.5)<f(7)$

C．$f(4.5)<f(7)<f(6.5)$　　D．$f(6.5)<f(7)<f(4.5)$

8、已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$满足 $f(x+2)=-f(x)$，则 $f(6)$ 的值为（　　）

(A) －1　　(B)0　　(C)1　　(D)2

9、函数 $f\left(x\right)$ 对于任意实数 x 满足条件 $f\left(x+2\right)=\dfrac{1}{f\left(x\right)}$，若 $f\left(1\right)=-5,$ 则 $f\left(f\left(5\right)\right)=$_________。

10、已知函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，对任意的 x_1,x_2 都满足 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，当 $x>0$ 时，$f(x)>0$.

(1)试判断 $f(x)$ 的奇偶性.

(2)试判断 $f(x)$ 的单调性，并证明.

(3)若 $f(3+4k)+f(m-k^2)<0$ 对所有的 $k\in\left[0,1\right]$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

第二章 基本初等函数（1）

2.1 指数函数

要点回顾

1、根式:①、如果$x^n=a$，那么x叫做a的n次方根，记作：$x=\begin{cases}\sqrt[n]{a}(n>1,n\in N^*,n\text{是奇数}),\\ \pm\sqrt[n]{a}(n>1,n\in N^*,n\text{是偶数}).\end{cases}$

②、$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$；　　③、$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a,\text{当n为奇数时},\\ |a|,\text{当n为偶数时}.\end{cases}$

2、分数指数幂的意义：

①$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ （$a>0$，m、n 都是正整数，$n>1$）；

②$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ （$a>0$，m、n 都是正整数，$n>1$）.

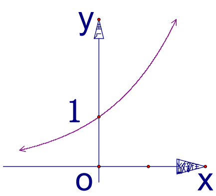
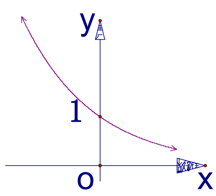
3.分数指数幂的运算性质：

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}(m,n\in Q)$；　$(a^m)^n=a^{mn}(m,n\in Q)$；　$(ab)^n=a^n\cdot b^n(n\in Q)$

4.指数函数

（1）指数函数的定义：一般地，函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）叫做指数函数.

（2）指数函数 $y=a^x(a>0\text{且}a\neq1)$ 的图象和性质。

	a>1	0<a<1
图象		
性质	(1)定义域：R	
	（2）值域：（0，+∞）	
	（3）过点（0，1），即 x=0 时，y=1	
	（4）在 R 上是增函数	（4）在 R 上是减函数

基础训练

1、根式和分数指数互化（填表）：

根式	$\sqrt[3]{x^2}$	$\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$	$\sqrt{p^6q^5}\,(p>0)$	$m\cdot\sqrt[3]{m^2}\,(m>0)$	$\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$		
分数指数	$x^{\frac{2}{3}}$					$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{-\frac{2}{3}}$

2、化简 $\sqrt{-x^3}$ 的结果是（　　）

A、$x\sqrt{x}$；B、$-x\sqrt{x}$；C、$x\sqrt{-x}$；D、$-x\sqrt{-x}$。

3、化简或计算下列各式：

（1）$\sqrt[3]{(-4)^3}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^0+0.25^{\frac{1}{2}}\times\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-4}$

（2）$(0.027)^{-\frac{1}{3}}-(-\dfrac{1}{7})^{-2}+(2\dfrac{7}{9})^{\frac{1}{2}}-(\sqrt{2}-1)^0$

（3）$4x^{\frac{1}{4}}(-3x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{3}})\div(-6x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}})$

（4）$\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}}{\left(\sqrt[6]{a}\right)^5\cdot a^{\frac{1}{4}}}$

4、函数 $f(x)=a^x(a>0且a\neq1)$ 对于任意的实数 x,y 都有

（A）$f(xy)=f(x)f(y)$　　　　（B）$f(xy)=f(x)+f(y)$

（C）$f(x+y)=f(x)f(y)$　　　　（D）$f(x+y)=f(x)+f(y)$

5、已知函数 $f(x)=a^x(0<a<1)$，对于下列命题：

①若 $x>0,则0<f(x)<1$；　②若 $x<1,则f(x)>a;$　③若 $f(x_1)>f(x_2),则x_1<x_2$.

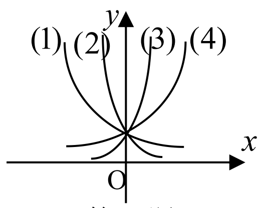
其中正确的命题　（　　）

A．有 3 个　　B．有 2 个　　C．有 1 个　　D．不存在

6、如图为指数函数 $(1)y=a^x,(2)y=b^x,(3)y=c^x,(4)y=d^x$，则 a,b,c,d 与 1 的大小关系为 （　　）

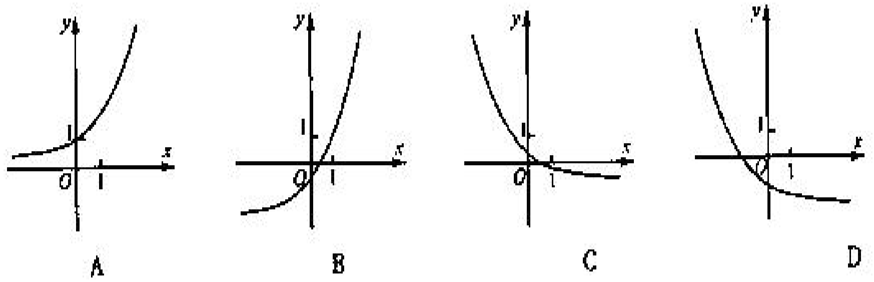
A．$a<b<1<c<d$　　　　B. $b<a<1<d<c$

C. $1<a<b<c<d$　　　　D. $a<b<1<d<c$



第(6)题

7、函数 $y=a^x-\dfrac{1}{a}(a>0,a\neq1)$ 的图象可能是（　　）



8、已知 $0<a<1$，$b<-1$，则函数 $y=a^x+b$ 的图像不经过

A．第一象限　B．第二象限　C．第三象限　D．第四象限

9、设 $a=0.6^{0.6}$，$b=0.6^{1.5}$，$c=1.5^{0.6}$,则 a，b，c 的大小关系是（　　）

（A）$a<b<c$　（B）$a<c<b$　（C）$b<a<c$　（D）$b<c<a$

10、比较下列各题中两个值的大小：

（1）$1.7^{2.5},1.7^{2.3}$　（2）$0.5^{0.7},0.6^{0.7}$　（3）$1.7^{0.3},0.9^{3.1}$.　（4）$1.7^{0.3},1.9^{0.4}$　。

11、函数 $y=\sqrt{1-(\frac{1}{2})^x}$ 的定义域是______；值域是______。

12、判断下列函数的奇偶性和单调性，并证明。

（1）$y=\frac{2^x-1}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1}$；

（2）$y=\frac{2^x+1}{2^x-1}$；

（3）$y=e^x-e^{-x}$；

(3) $y=e^x+e^{-x}$；

13、已知函数 $f(x)=a-\frac{1}{2^x+1}$.

（1）求证：不论 a 为何实数 $f(x)$ 总是为增函数；

（2）确定 a 的值，使 $f(x)$ 为奇函数；

（3）当 $f(x)$ 为奇函数时，求 $f(x)$ 的值域。

能力提升

1、函数 $y=a^{x-2}+1(a>0,a\neq 1)$ 不论 a 为何值时，其图像恒过的定点为______________.

2、若函数 $\mathrm{f(x)=a^x-1\,(a>0,a\neq 1)}$ 的定义域和值域都是 $[0,\ 2]$，则实数 a 等于______________

3、设函数 $f\left(x\right)$ 是 R 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f\left(x\right)=2^x-3$，则 $f\left(-2\right)$ 等于（　　）

A．-1　　B．$\dfrac{11}{4}$　　C．1　　D．$-\dfrac{11}{4}$

4、已知函数 $f(x)=\begin{cases}a^x(x<0),\\(a-3)x+4a(x\geq 0)\end{cases}$ 满足对任意 $x_1\neq x_2$, 都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ 成立，则 a 的取值范围是（　　）

A．$(0,\dfrac{1}{4}]$　　B．（0，1）　　C．$[\dfrac{1}{4},1)$　　D．（0，3）

5、对于函数 $f(x)$ 定义域中任意的 x_1，x_2（$x_1\neq x_2$），有如下结论：

①$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$；② $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$；　③ $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$；

④ $f(\dfrac{x_1+x_2}{2})<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.当 $f(x)=2^x$ 时，上述结论中正确结论的序号是________________.

6、函数 $y=(\dfrac{1}{2})^{\sqrt{-x^2+x+2}}$ 的递增区间是（　　）

A．$[-1,\dfrac{1}{2}]$　　B．$(-\infty,\dfrac{1}{2}]$　　C．$[2,+\infty)$　　D．$[\dfrac{1}{2},2]$

7、若函数 $f(x),g(x)$ 分别是 R 上的奇函数、偶函数，且满足 $f(x)-g(x)=e^x$，则有（　　）

A．$f(2)<f(3)<g(0)$　　B．$g(0)<f(3)<f(2)$

C．$f(2)<g(0)<f(3)$　　D．$g(0)<f(2)<f(3)$

8、已知 $x+x^{-1}=3$，求下列各式的值：（1）x^2+x^{-2}；（2）$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$；（3）$x^2-x^{-2}$.

9、解关于 x 的不等式：$a^{2x-1}>a^{3-x}(a>0,a\neq 1)$

10、已知定义域为R的函数$f(x)=\dfrac{-2^x+b}{2^{x+1}+a}$是奇函数。

（Ⅰ）求a,b的值；

(2)求证：函数$f(x)$在R上是减函数。

（3）若对任意的$t\in R$，不等式$f(t^2-2t)+f(2t^2-k)<0$恒成立，

求k的取值范围；

11、已知$f\left(x\right)=x\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)\left(x\neq 0\right)$，

⑴判断$f\left(x\right)$的奇偶性；　⑵证明$f\left(x\right)>0$。

2.2 对数函数

要点回顾

1、对数的定义：如果 $a^b=N$（$a>0$，$a\neq 1$），那么 b 叫做以 a 为底 N 的对数，记作 $\log_a N=b$.

2、指数式与对数式的互化：$a^b=N \Leftrightarrow \log_a N=b$.（$a>0$，$a\neq 1$，$N>0$）

3、对数运算性质：如果 $a>0, a\neq 1, N>0, M>0$ 有

①$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$.

②$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$.

③$\log_a M^n=n\log_a M$.（$M>0$，$N>0$，$a>0$，$a\neq 1$）

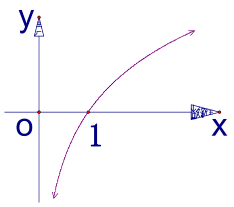
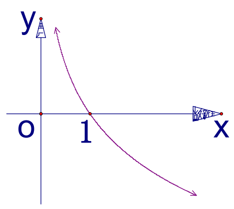
④对数换底公式：$\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$（$a>0$，$a\neq 1$，$b>0$，$b\neq 1$，$N>0$）.

⑤重要公式：$\log_a 1=0$；$\log_a a=1$；$\log_a b\cdot\log_b a=1$；对数恒等式 $a^{\log_a N}=N$。

4、对数函数

（1）对数函数的定义：函数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq 1$）叫做对数函数，其中 x 是自变量，定义域是（0，+∞）.

（2）对数函数的图象和性质：

<table>
<tr><td></td><td>a>1</td><td>0<a<1</td></tr>
<tr><td>图象</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">性质</td><td colspan="2">定义域：（0，+∞）</td></tr>
<tr><td colspan="2">值域：R</td></tr>
<tr><td colspan="2">过点（1，0），即当 $x=1$ 时，$y=0$</td></tr>
<tr><td>$x\in(0,1)$ 时 $y<0$；$x\in(1,+\infty)$ 时 $y>0$。</td><td>$x\in(0,1)$ 时 $y>0$；$x\in(1,+\infty)$ 时 $y<0$。</td></tr>
<tr><td>在（0，+∞）上是增函数。</td><td>在（0，+∞）上是减函数。</td></tr>
</table>

基础训练

1、把下列指数式与对数式互化：

指数式	$2^3=8$	$2^{-1}=\dfrac{1}{2}$	$10^{-1}=0.1$			
对数式				$\log_{\frac{1}{2}}16=-4$	$\lg 100=2$	$\ln 2=x$

2、求下列各式的值：

$\log_4{}^{\frac{1}{16}} =$____ ； $\log_4{}^{\frac{1}{4}} =$____ ； $\log_4{}^{2} =$______ ； $\log_4{}^{16} =$____ ；

$\log_4{}^{\sqrt{2}} =$____ ； $\log_{\frac{1}{2}}{}^{\frac{1}{16}} =$____ ； $\log_{\frac{1}{2}}{}^{4} =$_____ ； $\log_{\frac{1}{2}}{}^{\sqrt{2}} =$_______ 。

3、计算：

（1） $\lg^2 5 + \lg 2 \lg 50$ ；

（2） $[(1-\log_6 3)^2 + \log_6 2 \cdot \log_6 18] \div \log_6 4$ ；

（3） $\lg 500 + \lg \frac{8}{5} - \frac{1}{2} \lg 64 + 50(\lg 2 + \lg 5)^2$ ；

（4） $\lg \frac{1}{2} - \lg \frac{5}{8} + \lg 12.5 - \log_8 9 \cdot \log_{27} 8 + e^{2\ln 2}$

（5） $(\log_3 2 + \log_9 2) \cdot (\log_4 3 + \log_8 3)$ 。

4、函数 $f(x) = \log_a x (a > 0 且 a \neq 1)$ 对于任意的实数 x, y 都有（　　）

（A） $f(xy) = f(x) f(y)$　　（B） $f(xy) = f(x) + f(y)$

（C） $f(x+y) = f(x) f(y)$　　（D） $f(x+y) = f(x) + f(y)$

5、函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)}$ 的定义域为（　　）

A. $[1,+\infty)$　　B. $(\frac{2}{3},+\infty)$　　C. $\left[\frac{2}{3},1\right]$　　D. $\left(\frac{2}{3},1\right]$

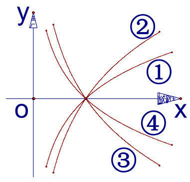
6、若函数 $y=\log_a(x+b)(a>0,a\neq 1)$ 的图象过两点(-1，0)和(0，1)，则　　（　　）

A．a=2,b=2　　B．a=$\sqrt{2}$,b=2　　C．a=2,b=1　　D．a=$\sqrt{2}$,b=$\sqrt{2}$

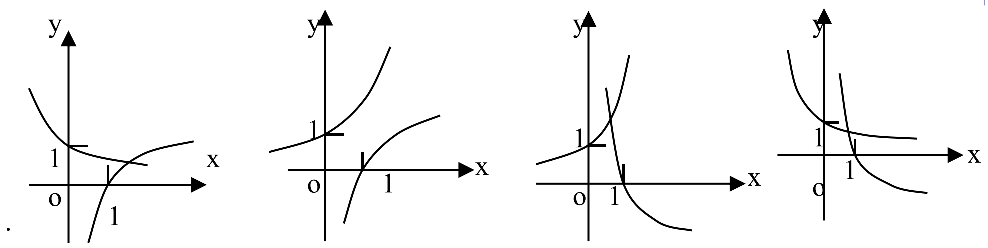
7、如图为指数函数 $(1)y=\log_a^x,(2)y=\log_b^x,(3)y=\log_c^x,(4)y=\log_d^x$，则 a,b,c,d 与 1 的大小关系为（ ）

A. $a<b<1<c<d$　　B. $b<a<1<d<c$

C. $1<a<b<c<d$　　D. $d<c<1<b<a$

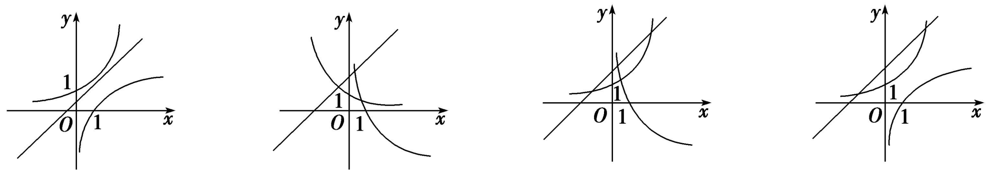


8、当 $0<a<1$ 时,在同一坐标系中,函数 $y=a^{-x}$ 与 $y=\log_a x$ 的图象是(　　)



A　　B　　C　　D

9．在同一坐标系中画出函数 $y=\log_a x$，$y=a^x$，$y=x+a$ 的图象，可能正确的是(　　)



A　　B　　C　　D

10、比较下列比较下列各组数中两个值的大小：

（1）$\log_6 7$，$\log_7 6$；　　（2）$\log_3 \pi$，$\log_2 0.8$；

（3）$1.1^{0.9}$，$\log_{1.1} 0.9$，$\log_{0.7} 0.8$；　　（4）$\log_5 3$，$\log_6 3$，$\log_7 3$．

11．若 $a=\log_3 \pi$，$b=\log_7 6$，$c=\log_2 0.8$，则（　　）

A．$a>b>c$　　B．$b>a>c$　　C．$c>a>b$　　D．$b>c>a$

12、设$a=\log_{\frac{1}{2}}3$，$b=\left(\frac{1}{3}\right)^{0.2}$，$c=2^{\frac{1}{3}}$，则（　　）

A．$a<b<c$　　B．$c<b<a$　　C．$c<a<b$　　D．$b<a<c$

13、若函数$f(x)=\log_a x(0<a<1)$在区间$[a,2a]$上的最大值是最小值的 2 倍，则a值为（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{8}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{4}$

14、对于函数$f(x)$定义域中任意的x_1，x_2（$x_1\neq x_2$），有如下结论：

①$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$；② $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$；　③$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$；

⑤$f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.当$f(x)=\lg x$时，上述结论中正确结论的序号是______________.

15、已知$f(x)=\begin{cases}(3a-1)x+4a, x<1\\ \log_a x, x>1\end{cases}$是$(-\infty,+\infty)$上的减函数，那么$a$的取值范围是（　）

（A）$(0,1)$　　（B）$(0,\frac{1}{3})$

（C）$[\frac{1}{7},\frac{1}{3})$　　（D）$[\frac{1}{7},1)$

16、已知函数$y=\log_2\frac{1+x}{1-x}$,

（1）求函数$f(x)$的定义域；

（2）判断并证明$f(x)$的奇偶性；

（3）判断并证明$f(x)$的单调性；

（4）求使$f(x)>0$的x的取值范围。

17、已知函数 $f(x)=\lg x+\dfrac{1}{2-x}$

（1）求函数 $f(x)$ 的定义域；

（2）证明：$f(x)$ 在(2，+∞)上为增函数；

（3）当 $x\in[3,5]$ 时，求函数的值域.

16、已知函数 f(x)=lg(x²−2mx+m+2).

(1)若 f(x)的定义域为 R，求实数 m 的取值范围；

(2)若 f(x)的值域为 R，求实数 m 的取值范围.

能力提升

1、 已知 $2^x=3^y$，则 $\dfrac{x}{y}=$　　　　（　）

A. $\dfrac{\lg 2}{\lg 3}$　　B. $\dfrac{\lg 3}{\lg 2}$　　C. $\lg\dfrac{2}{3}$　　D. $\lg\dfrac{3}{2}$

2、（1）已知 $\log_5 35=m,$ 求 $\log_7 35$　；

（2）已知 $\log_{18} 9=a$，$18^b=5$，求 $\log_{36} 45$（用 a,b 表示）.

3、若 $0<a<1$，且函数 $f(x)=|\log_a x|$，则下列各式成立的是　　　　　　　　　　（　）

A．$f(2)>f(\frac{1}{3})>f(\frac{1}{4})$　　　　　　B．$f(\frac{1}{4})>f(2)>f(\frac{1}{3})$

C．$f(\frac{1}{3})>f(2)>f(\frac{1}{4})$　　　　　　D．$f(\frac{1}{4})>f(\frac{1}{3})>f(2)$

4、函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(4x-x^2)$ 的单调递增区间是（　　）

A．$(-\infty,2)$　　B．$(2,+\infty)$　　C．$(0,2)$ ；D．$[2,4)$

5．已知定义域为 R 的偶函数 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$是增函数，且 $f(\frac{1}{2})=0$，则不等式 $f(\log_4 x)>0$ 的解集是（　　）

A．$\{x\,|\,x>2\}$　　　　　　B．$\left\{x\,|\,0<x<\frac{1}{2}\right\}$

C．$\left\{x\,|\,0<x<\frac{1}{2}或x>2\right\}$　　　　　　D．$\left\{x\,|\,\frac{1}{2}<x<1或x>2\right\}$

5、判断并证明函数 $f(x)=\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)$ 的奇偶性。

7、 已知函数 $f(x)=\log_a(a-a^x)\ (a>1)$，求 $f(x)$ 的定义域和值域；

8、解关于的 x 不等式：$\log_a(2x-1)>\log_a(3-x),(a>0,a\neq 1)$

9、已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-\log_2\frac{1+x}{1-x}$，求函数 $f(x)$ 的定义域，并讨论它的奇偶性和单调性.

2.3 幂函数

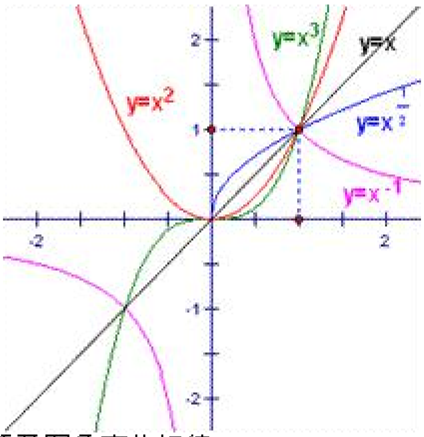
．要点回顾

1. 幂函数的概念：形如 $y=x^{\alpha}$（α 为常数）的函数，即以底数为自变量 幂为因变量，指数为常量的函数称为幂函数。

2.幂函数的图像和性质：

⑴五个基本幂函数的图象：

①$y=x$；②$y=x^{\frac{1}{2}}$；③$y=x^{2}$；④$y=x^{-1}$；⑤$y=x^{3}$．



⑵幂函数的的性质及图象变化规律：

①所有的幂函数在（0，+∞）都有定义，并且图象都过点（1，1）；

②$\alpha>0$ 时，定义域为 R，幂函数的图象通过原点和点$(1,1)$，并且在区间$[0,+\infty)$上是增函数．

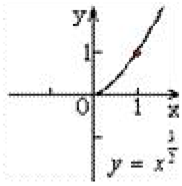
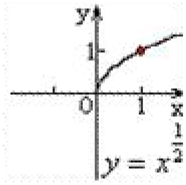
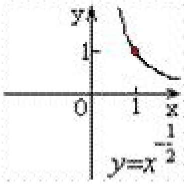
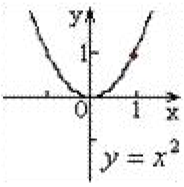
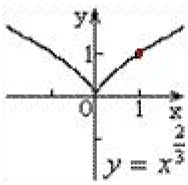
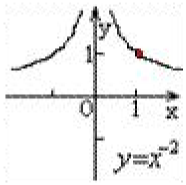
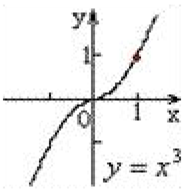
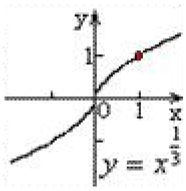
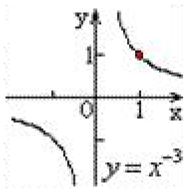
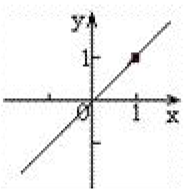
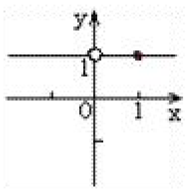
③当 $\alpha>1$时，幂函数的图象在区间$[0,+\infty)$上下凸；当 $0<\alpha<1$时，幂函数的图象在区间$[0,+\infty)$上上凸；

④$\alpha<0$时，幂函数的图象过点$(1,1)$，在区间$(0,+\infty)$上是减函数．在第一象限内，当 x 从右边趋向原点时，图象在 y 轴右方无限地逼近 y 轴正半轴，当 x 趋于$+\infty$时，图象在 x 轴上方无限地逼近 x 轴正半轴．

⑤函数 $y=x^{\alpha}$的图像，因 α 的取值不同，可能在第Ⅰ、Ⅱ象限为偶函数，可能在第Ⅰ、III象限为奇函数，可能仅在第Ⅰ象限为非奇非偶函数．但不可能在第Ⅳ象限．

⑥对于有理数 $\alpha=\frac{p}{q}\left(|p|、|q|互质\right)$，若其中的 q 为偶数时，则函数 $y=x^{\alpha}$是非奇非偶函数，图象只在第一象限；若其中的 q 为奇数、 p 是奇数时，函数 $y=x^{\alpha}$是奇函数；若其中的 q 为奇数、 p 是偶数时，函数 $y=x^{\alpha}$是偶函数．

⑦幂函数 $y = x^{\alpha} = x^{\frac{q}{p}}$ 的图象（右下方为实例函数作代表）：

	$\alpha > 1$	$0 < \alpha < 1$	$\alpha < 0$
p 偶 q 奇			
p 奇 q 偶			
p 奇 q 奇			
	两种特殊图像		
$\alpha = 1$		$\alpha = 0$	

基础训练

1．下列所给出的函数中，是幂函数的是　　　　　　　　　　　　　　　　（　）

A．$y = -x^3$　　B．$y = x^{-3}$　　C．$y = 2x^3$　　D．$y = x^3 - 1$

2、幂函数 $f(x)$ 的图象过点 $\left(4, \frac{1}{2}\right)$，那么 $f(8)$ 的值为　　　　　　　　（　　）

(A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　(B) 64　　(C) $2\sqrt{2}$　　(D) $\frac{1}{64}$

3、 设 $a \in \left\{-1, 1, \frac{1}{2}, 3\right\}$，则使函数 $y = x^{\alpha}$ 的定义域为 R 且为奇函数的所有 α 值为

(A) $1,3$　(B) $-1,1$　(C) $-1,3$　(D) $-1,1,3$

4．下列命题中正确的是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

A．当 $\alpha = 0$ 时函数 $y = x^{\alpha}$ 的图象是一条直线

B．幂函数的图象都经过（0，0）和（1，1）点

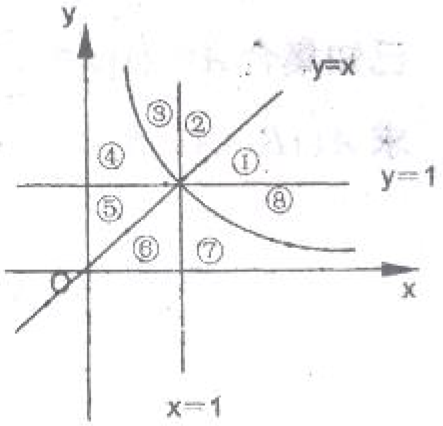
C．若幂函数 $y = x^{\alpha}$ 是奇函数，则 $y = x^{\alpha}$ 是定义域上的增函数

D．幂函数的图象不可能出现在第四象限

5.若幂函数 $y=x^{\alpha}$ 在(0,+∞)上是增函数，则(　　)

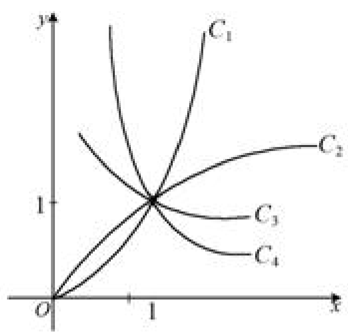
(A)α>0 ；　(B)α<0；(C)α=0　　；　(D)不能确定。

6、幂函数 $y=x^{-1}$ 及直线 $y=x$，$y=1$，$x=1$ 将平面直角坐标系的第一象限分成八个“部分”：①，②，③，④，⑤，⑥，⑦，⑧（如图所示），那么幂函数 $y=\sqrt{x}$ 的图象经过的“部分”是（　　）



A.④⑦　B.④⑧　C.③⑧　D.①⑤

7、如图是幂函数 y＝x^n 在第一象限内的图象，已知 n 取 $\frac{1}{2}$，2，-2，$-\frac{1}{2}$ 四值，则相应于曲线 C_1，C_2，C_3，C_4 的 n 依次为（　　）



A．2，$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$，-2;　　B．-2，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，2

C．$-\frac{1}{2}$，-2，2，$\frac{1}{2}$;　　D．2，$\frac{1}{2}$，-2，$-\frac{1}{2}$

8．如图 1—9 所示，幂函数 $y=x^{\alpha}$ 在第一象限的图象，比较 $0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,1$ 的大小（　　）

A．$\alpha_1<\alpha_3<0<\alpha_4<\alpha_2<1$

B．$0<\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\alpha_4<1$

C．$\alpha_2<\alpha_4<0<\alpha_3<1<\alpha_1$

D．$\alpha_3<\alpha_2<0<\alpha_4<1<\alpha_1$

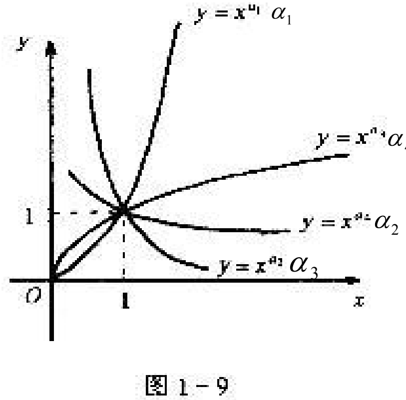


图 1－9

9、设 $a=0.6^{0.3},b=0.7^{0.3},c=1.1^{-0.3}$，则$a,b,c$之间的大小关系是（　　）

A．$c<b<a$　　B．$c<a<b$　　C．$a<b<c$　　D．$b<a<c$

10、已知 $a=2^{\frac{4}{3}}$，$b=4^{\frac{2}{5}}$，$c=25^{\frac{1}{3}}$，则(　　)

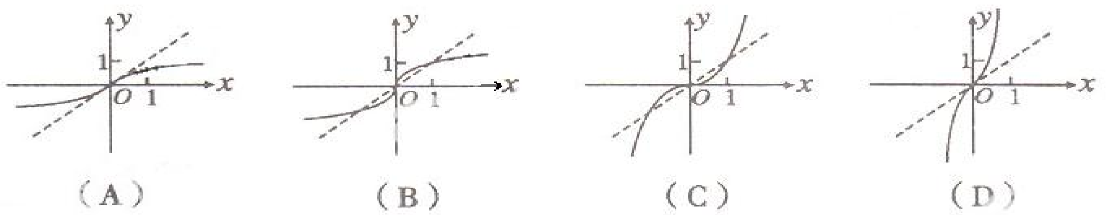
A．$b<a<c$　　B．$a<b<c$

C．$b<c<a$　　D．$c<a<b$

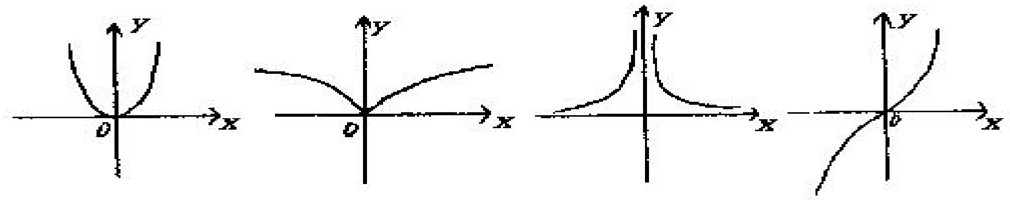
11、函数 $f(x)=(m^2-m-1)x^{m^2-2m-3}$ 是幂函数，且在 $x\in(0,+\infty)$ 上是减函数，求实数 m 的值。

能力提升

1. 函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的图像是　（　　）



2．函数 $y=x^{\frac{4}{3}}$ 的图象是（　　）

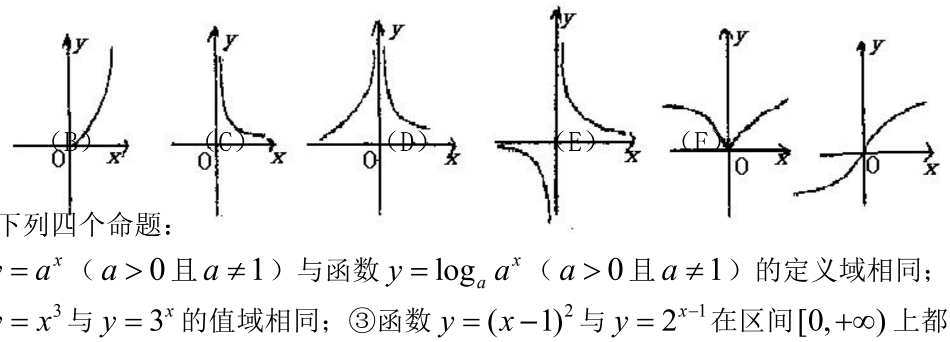


A.　　B.　　C.　　D.

3、下面六个幂函数的图象如图所示，试建立函数与图象之间的对应关系.

(1) $y=x^{\frac{3}{2}}$；(2) $y=x^{\frac{1}{3}}$；(3) $y=x^{\frac{2}{3}}$；

(4) $y=x^{-2}$；(5) $y=x^{-3}$；(6) $y=x^{-\frac{1}{2}}$.

(A)


4、给出下列四个命题：

①函数 $y=a^x$（$a>0$且$a\neq 1$）与函数 $y=\log_a a^x$（$a>0$且$a\neq 1$）的定义域相同；

②函数 $y=x^3$ 与 $y=3^x$ 的值域相同；③函数 $y=(x-1)^2$ 与 $y=2^{x-1}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上都是增函数；④函数 $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x-1}$ 与 $y=\log_a\frac{1-x}{1+x}(a>0,a\neq 1)$ 都是奇函数，其中正确命题的序号是____________（把你认为正确的命题序号都填上）

第三章 函数的应用

3.1 函数与方程

要点回顾

1、零点：使 $f(x)=0$ 的实数 x 叫做函数 $y=f(x)(x\in D)$ 的零点

方程 $f(x)=0$ 有实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴有交点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 有零点。

2、对于 $\left[a,b\right]$ 上的连续函数 $y=f(x)$，若 $f(a)\cdot f(b)<0$，则函数 $y=f(x)$ 在 $\left(a,b\right)$ 内有零点，即存在 $c\in\left(a,b\right)$，使得 $f(c)=0$。

3、二分法：要使零点满足精确度 ε，就是要使零点所在区间 $\left[a,b\right]$ 满足 $\left|a-b\right|<\varepsilon$。

基础训练

1、函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像在 $\left[a,b\right]$ 内是连续的曲线，若 $f\left(a\right)\cdot f\left(b\right)<0$，则函数 $y=f\left(x\right)$ 在区间 $\left(a,b\right)$ 内（　　）A 只有一个零点 ；　　B 至少有一个零点；C 无零点 ；　　D 无法确定

2、若函数 y=f(x)在区间［a，b］上的图象为连续不断的一条曲线，则下列说法正确的是(　　)

(A)若 f(a)•f(b)＞0，不存在实数 c∈(a，b)使得 f(c)=0

(B)若 f(a)•f(b)＜0，存在且只存在一个实数 c∈(a，b)使得 f(c)=0

(C)若 f(a)•f(b)＞0，有可能存在实数 c∈(a，b)使得 f(c)=0

(D)若 f(a)•f(b)＜0，有可能不存在实数 c∈(a，b)使得 f(c)=0

3、若函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[a,b\right]$ 上为减函数，则 $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上　　(　　)

(A)至少有一个零点 ；　(B)只有一个零点；(C)没有零点　　(D)至多有一个零点

4、已知函数 f(x)在区间[a,b]上单调且 f(a)f(b)<0,则方程 f(x)=0 在区间[a,b]内（　　）

A．　至少有一实根；B．　至多有一实根；C．没有实根；　D．必有唯一的实根。

5、若函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，且同时满足 $f\left(a\right)f\left(b\right)<0$，$f\left(a\right)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)>0$. 则　　(　　)

(A) $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ 上有零点　　(B) $f\left(x\right)$ 在 $\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$ 上有零点

(C) $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ 上无零点　　(D) $f\left(x\right)$ 在 $\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$ 上无零点

6、函数 $f(x)=2^x-3$ 的零点所在区间为（　　）

（A）（－1，0）　（B）（0，1）　（C）（1，2）　（D）（2，3）

7、函数 $f\left(x\right)=\ln x+2x-6$ 的零点一定位于下列哪个区间

A $\left(1,2\right)$ ；　　B $\left(2,3\right)$；　C $\left(3,4\right)$；　　D $\left(5,6\right)$

8、函数 $f(x)=\lg x-\dfrac{9}{x}$ 的零点所在的大致区间是(　　)

(A)(6，7)；　　(B)(7，8)；　　(C)(8，9)；　　(D)(9，10)

9、若函数 $f\left(x\right)=x^2+4x+a$ 没有零点，则实数 a 的取值范围是（　）

A $a<4$ ；　　B $a>4$；　　C $a\le 4$ ；　　D $a\ge 4$

10、已知函数 $f(x)=3ax+1-2a$ 在区间（－1，1）上存在 x_0，使得 $f(x_0)=0$，则（　　）

A．$-1<a<\dfrac{1}{5}$　　B．$a>\dfrac{1}{5}$　　C．$a<-1$ 或 $a>\dfrac{1}{5}$　　D．$a<-1$

11、下列函数中有 2 个零点的是　　(　　)

(A) $y=\lg x$　　(B) $y=2^x$　　(C) $y=x^2$　　(D) $y=|x|-1$

12、在用二分法求方程 f(x)=0 在［0,1］上的近似解时，经计算，f(0.625)＜0，f(0.75)＞0，f(0.687 5)＜0,即得到方程的一个近似解为______.(精确度 0.1)

13、若关于 x 的方程 $x^2+(a^2-2)x+a-3=0$ 的一根比 2 小且另一根比 2 大，求 a 的取值范围是

14、若关于 x 的方程 $3x^2-5x+a=0$ 的一个根在(－2,0)内，另一个根在(1,3)内，求 a 的取值范围.

15、已知关于 x 的方程 $x^2+2mx+2m+3=0$ 的两个不等实根都在区间（0，2）内，求实数 m 的取值范围.

能力提升

1、设函数 $y=x^3$ 与 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ 的图象的交点为 $(x_0,\ y_0)$，则 x_0 所在的区间是（　　）

A．$(0,1)$　　B．$(1,2)$　　C．$(2,3)$　　D．$(3,4)$

2、已知 $f(x)=\begin{cases}x+3, & (x\le 1)\\ -x^2+2x+3, & (x>1)\end{cases}$，则函数 $g(x)=f(x)-e^x$ 的零点个数为　（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

3、已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, x<1\\ \log_{\frac{1}{2}}x, x\ge 1\end{cases}$ 函数 $g(x)=f(x)-k$ 有三个不同的零点，则实数 k 的取值范围是

4．已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$，

（1）判断 $f(x)$ 的奇偶性；

（2）证明函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 为减函数；

（3）方程 $f(x)-\dfrac{x+1}{x}=0$ 是否有根？如果有根 x_0，请求出一个长度为 $\dfrac{1}{4}$ 的区间 (a,b)，使 $x_0\in(a,b)$，如果没有，说明为什么？（注：区间 (a,b) 的长度=$b-a$）

*5、已知 a 是实数，函数 $f(x)=2ax^2+2x-3-a$．如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有零点，求 a 的取值范围．

*6、已知函数 $f(x)=a^x+\dfrac{x-2}{x+1}\ (a>1)$，

求证：（1）函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上为增函数；（2）方程 $f(x)=0$ 没有负数根.

3.2 函数模型及其应用

础训练

1、下列函数中随 x 增大而增大速度最快的是（　　）

A、$y=2x$ ；　B、$y=x^2$；　C、$y=\log_2 x$；　D、$y=2^x$

2、某公司为了适应市场需求对产品结构做了重大调整，调整后初期利润增长迅速，之后增长越来越慢，若要建立恰当的函数模型来反映该公司调整后利润y与时间x的关系，可选用(　　)

A. 一次函数　　*B*. 二次函数　　*C*. 指数型函数　　*D*. 对数型函数

3、某校甲、乙两食堂2016年元月份的营业额相等，甲食堂的营业额逐月增加，并且每月增加值相同；乙食堂的营业额也逐月增加，且每月增加的百分率相同. 已知2016年9月份两食堂的营业额又相等，则2016年5月份营业额较高的是（　　）

A. 甲；　B. 乙；　C. 甲、乙营业额相等；　D. 不能确定

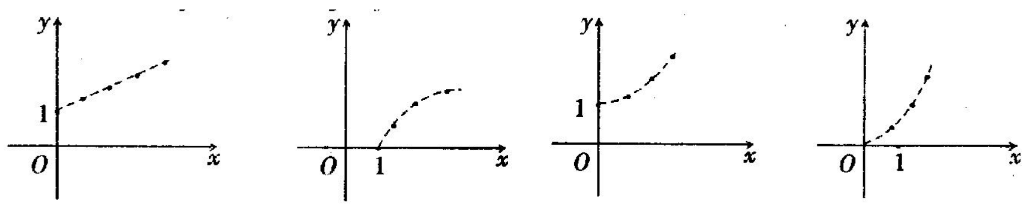
4、下表是函数值 y 随自变量 x 变化的一组数据，由此判断它最可能的函数模型是(　　).

x	4	5	6	7	8	9	10
y	15	17	19	21	23	25	27

A. 一次函数模型；　B. 二次函数模型；　C. 指数函数模型；　D. 对数函数模型

5、某市新城区的居民住宅面积总量每年比上一年增长 10.4%，那么经过 x 年（$x\in N$)

可以增长到原来的 y 倍，则函数 $y=f(x)$ 的图象大致为下列图象中　　（　　）



A.　　B.　　C.　　D.

6、某种细菌在培养过程中，每 15 min 分裂一次(由 1 个分裂成 2 个)，这种细菌由 1 个分裂成 4 096 个需经过(　　)

A. 12 h　B. 4 h　C. 3 h　D. 2 h

7、某件上衣的标价为 132 元，若降价以九折出售(即优惠 10%)，仍可获利 10%(相对进货价)，则该上衣的进货价是(　　)

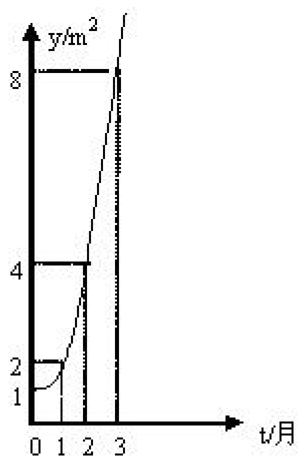
A. 118 元　B. 105 元　C. 106 元　D. 108 元

8、据报道, 全球变暖, 使北冰洋冬季冰盖面积在最近 50 年内减少了 5%, 如果按此规律, 设 2000 年的冬季冰盖面积为 m, 从 2000 年起, 经过 x 年后冬季冰盖面积 y 与 x 的函数关系是(　)

A. y=$0.95^{\frac{x}{50}}\cdot m$；　B. y=$(1-0.05^{\frac{x}{50}})\cdot m$；

C. y=$0.95^{50\cdot x}\cdot m$；　D. y=$(1-0.05^{50\cdot x})\cdot m$

9、如图所示的是某池塘中的浮萍蔓延的面积（m^2）与时间t（月）的关系：$y=a^t$，有以下叙述：



① 这个指数函数的底数是 2；

② 第 5 个月时，浮萍的面积就会超过$30m^2$；

③ 浮萍从$4m^2$蔓延到$12m^2$需要经过 1.5 个月；

④ 浮萍每个月增加的面积都相等；

（5） 若浮萍蔓延到$2m^2$、$3m^2$、$6m^2$所经过的时间分别为

t_1、t_2、t_3，则$t_1+t_2=t_3$。其中正确的是 （　　）

A．①②　　B．①②③④；　　C．②③④⑤　　D．①②⑤

10、某商店如果将进价为 8 元的商品按每件 10 元售出，每天可销售 200 件，现在提高售价以赚取更多利润．已知每涨价 0.5 元，该商店的销售量会减少 10 件，问将售价定为多少时，才能使每天的利润最大？其最大利润为多少？

11、某摩托车生产企业，上年度生产摩托车的投入成本为 1 万元/辆，出厂价为 1.2 万元/辆，年销售量为 1000 辆．本年度为适应市场需求，计划提高产品档次，适度增加投入成本．若每辆车投入成本增加的比例为$x(0<x<1)$，则出厂价相应提高的比例为$0.75x$，同时预计年销售量增加的比例为$0.6x$．已知年利润=（出厂价－投入成本）×年销售量．

（Ⅰ）写出本年度预计的年利润y与投入成本增加的比例x的关系式；

（Ⅱ）为使本年度的年利润比上年有所增加，问投入成本增加的比例x应在什么范围内？

12、某产品生产厂家根据以往的生产销售经验得到下面有关销售的统计规律：每生产产品 x（百台），其总成本为 G(x)万元，其中固定成本为 2 万元，并且每生产 100 台的生产成本为 1 万元（总成本=固定成本+生产成本），销售收入 R(x)满足

$$R(x)=\begin{cases}-0.4x^2+4.2x-0.8 & (0\le x\le 5)\\ 10.2 & (x>5)\end{cases}$$

假定该产品销售平衡，那么根据上述统计规律。

（1）要使工厂有盈利，产品 x 应控制在什么范围？

（2）工厂生产多少台产品时赢利最大？并求此时每台产品的售价为多少？

13、由于生态环境改善，某水库的鱼逐步增加，直到一个稳定生态平衡状态，经测算前 4 个月鱼的数量分别为 1 万尾，1.2 万尾，1.3 万尾，1.325 万尾，现给出两个函数模型：

（1） $y=ax^2+bx+c$ （2） $y=a\cdot b^x+c$

其中 x 表示月份，y 表示鱼的数量，你认为应该选择哪个模型最接近客观实际？并说明理由？