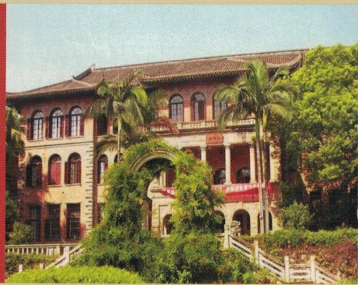
CN35-1084/O1

FUJIAN ZHONGXUE SHUXUE

福建中学数学



福建师范大学数学与信息学院
福建省数学学会

中国知网
万方数据库
维普资讯网
龙源期刊网等全文收录

1958年创刊（月刊）
2018年第10期 总第322期

10

2018 中国·福州
FUZHOU CHINA

福建中学数学

刊名由林群院士题写

1958年创刊（月刊）
2018年第10期　总第322期
2018年10月20日出版
CN35-1084/O1

主　管　福建师范大学
主　办　福建师范大学数学与信息学院
　　　　福建省数学学会
编辑出版　《福建中学数学》编辑部
地　址　福建师范大学数学与信息学院
邮　编　350117
电　话　0591-83441835
传　真　0591-83441835
邮　箱　fjzxsx@fjnu.edu.cn

发　行　福建省福州市邮政局
订　阅　全国各地邮局
印　刷　福州万紫千红印刷有限公司

目　录

$=\dfrac{\cos(x+y)}{\cos x}+\dfrac{\sin x\sin y}{\cos x}$，

整理得 $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$．

应用函数奇偶性，

得 $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$．

将上述结果整理一下，得到下列和角公式：

$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,\\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.\end{cases}\quad(8)$$

事实上，公式（5）-（8）是所有三角公式的基础，其它常见的三角公式都可以通过这些公式推导出来．

两道市质检三角压轴题的另解

郑德松　福建省宁德市霞浦第一中学（355100）

题1（福建省厦门市2018届高中毕业班第二次质量检查考试·理16）等边 $\triangle ABC$ 的边长为1，点 P 在其外接圆劣弧 AB 上，则 $S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}$ 的最大值为____．

解析 如图1，将 $\triangle CPB$ 沿直线 PB 翻折得 $\triangle QPB$，

因为 $\angle APC=\angle ABC=60^\circ$，

$\angle BPC=\angle BAC=60^\circ$，

所以三点 A,P,Q 三线，

从而 $S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle QPB}$

$=S_{\triangle QAB}=\dfrac{1}{2}\sin\angle QBA$，

当 $\angle QBA=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}$ 的最大值为 $\dfrac{1}{2}$．

评注 利用"同弦所对的圆周角相等"这一平面几何的知识，巧妙地通过翻折变换将两个面积合二为一，这样通过简单的计算就求出了最大值．

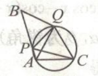


图1

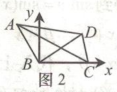


图2

题2（福建省泉州市2018届高三下学期质量检查考试 理16）在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=120^\circ$，$AC=2\sqrt{19}$，$2AB=3BC$，$AD=2BD$，$\triangle BCD$ 的面积为 $2\sqrt{3}$，则 $AD=$_______．

解析 设 $AB=3m$，$BC=2m$，

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得：

$(2\sqrt{19})^2=(3m)^2+(2m)^2-2\times3m\times2m\times(-\dfrac{1}{2})$，

解得 $m=2$，即 $BA=6$，$BC=4$．

如图2，建立直角坐标系，

则 $B(0,0)$，$A(-3,3\sqrt{3})$，

设 $D(x,y)(x>0)$，由 $AD=2BD$，

代入化简得 $(x-1)^2+(y+\sqrt{3})^2=16$ （1），

由 $S_{\triangle BCD}=2\sqrt{3}$，得 $y=\sqrt{3}$ （2），

联立（1）（2）得 $\begin{cases}x=3,\\ y=\sqrt{3},\end{cases}$ 即 $D(3,\sqrt{3})$，

从而 $|AD|=\sqrt{(3+3)^2+(\sqrt{3}-3\sqrt{3})^2}=4\sqrt{3}$．

评注 从轨迹法的角度思考，可先求出满足 $AD=2BD$ 的点 D 的轨迹（阿波罗尼兹圆）方程，结合题意可知 D 点也在直线 $y=\sqrt{3}$ 上，从而得到两个方程，进而解决问题．用方程思想解本题自然，更易让学生接受，也突出了数学思想方法的重要性．

一类"准等比"数列和不等式的放缩证明

邱东华　福建省三明市清流县第一中学（365300）

我们知道，首项 a_1 公比为 $q(q\neq1)$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$，前 n 项和 $S_n=a_1+a_1\cdot q+\cdots+a_1\cdot q^{n-1}=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$．本文把数列 $\{\dfrac{p}{q^n+r}\}$（其中 p,q,r

均为常数）称为"准等比"数列，对于这类数列，我们可以将其放缩为等比数列，再求其和的上（下）限，或证明与其和有关的不等式．

例1 求证：$\frac{2}{3^1-1}+\frac{2}{3^2-1}+\cdots+\frac{2}{3^n-1}<\frac{3}{2}$．

证明 我们可以这样用放缩法证明：

$\because \frac{2}{3^n-1}=\frac{2}{3\times3^{n-1}-1}=\frac{2}{2\times3^{n-1}+3^{n-1}-1}$

$\le\frac{2}{2\times3^{n-1}}=\frac{1}{3^{n-1}}$，

$\therefore \frac{2}{3^1-1}+\frac{2}{3^2-1}+\cdots+\frac{2}{3^n-1}$

$\le 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{1\times(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}}$

$=\frac{3}{2}\times(1-\frac{1}{3^n})<\frac{3}{2}$，证毕．

证法很简洁清晰，由$3^n-1=3\times3^{n-1}-1=2\times3^{n-1}+3^{n-1}-1\ge2\times3^{n-1}$，得到$\frac{2}{3^n-1}\le\frac{1}{3^{n-1}}$．可是，这样放缩是怎样想到的呢？难到可以事先知道$\frac{2}{3^n-1}\le\frac{1}{3^{n-1}}$这个结果再进行配凑的？确实如此，这个放大的结果确实是可以先通过分析推理得出来的！请看下面的分析：

思路1 因为左边和式无法直接求和，但结构形式与等比数列相似，考虑将左边和式的各项分别放大为某个等比数列的对应项，这样就能求和了，显然这个等比数列的公比应为$\frac{1}{3}$，也就是猜想$\frac{2}{3^1-1}+\frac{2}{3^2-1}+\cdots+\frac{2}{3^n-1}\le\frac{t}{3}+\frac{t}{3^2}+\frac{t}{3^3}+\cdots+\frac{t}{3^n}$，即猜想$\frac{2}{3^n-1}\le\frac{t}{3^n}$，化简得$t\ge2+\frac{2}{3^n-1}$．当$n=1$时，$2+\frac{2}{3^n-1}$取最大值3，所以取$t=3$，即$\frac{2}{3^n-1}\le\frac{3}{3^n}=\frac{1}{3^{n-1}}$，猜想成立！再按此猜想得到放大目标．写出放大过程：$\frac{2}{3^n-1}=\frac{2}{3\times3^{n-1}-1}=\frac{2}{2\times3^{n-1}+3^{n-1}-1}\le\frac{2}{2\times3^{n-1}}=\frac{1}{3^{n-1}}$，最后再完成证明：$\frac{2}{3^1-1}+\frac{2}{3^2-1}+\cdots+\frac{2}{3^n-1}\le1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{1\times(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\times(1-\frac{1}{3^n})<\frac{3}{2}$，证毕．

思路2 还是将$\frac{2}{3^1-1}+\frac{2}{3^2-1}+\cdots+\frac{2}{3^n-1}$放大为某个等比数列$\{a_n\}$的前$n$项和，其中$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$，$a_1>0$，$0<q<1$，即假设$\frac{2}{3^1-1}+\frac{2}{3^2-1}+\cdots+\frac{2}{3^n-1}\le\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}<\frac{a_1}{1-q}=\frac{3}{2}$，令$q=\frac{1}{3}$，得$a_1=1$，所以$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=\frac{1}{3^n}$，经验证$\frac{2}{3^n-1}\le\frac{1}{3^{n-1}}$成立，与之前的放缩结果一致．

我们不妨再用这种方法验证下面问题：

例2 （2006年高考福建卷·理22（Ⅲ））已知数列$a_n=2^n-1(n\in\mathbf{N}^*)$．求证：$\frac{n}{2}-\frac{1}{3}<\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$．

证明 $\because \frac{a_k}{a_{k+1}}=\frac{2^k-1}{2^{k+1}-1}=\frac{2^k-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{2^{k+1}-1}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4\times2^k-2}<\frac{1}{2}$，$k=1,2,\ldots,n$，

$\therefore \frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n}{2}$．

又$\because \frac{a_k}{a_{k+1}}=\frac{2^k-1}{2^{k+1}-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4\times2^k-2}$，

令$\frac{1}{4\times2^k-2}\le\frac{t}{2^k}$，则$t\ge\frac{2^k}{4\times2^k-2}$，

当$k=1$时，$\frac{2^k}{4\times2^k-2}$取最大值$\frac{1}{3}$，

$\therefore$取$t=\frac{1}{3}$，即$\frac{1}{4\times2^k-2}\le\frac{1}{3}\times\frac{1}{2^k}$，

明确了放缩的目标，后续的证明自然就水到渠成了：$\therefore \frac{a_k}{a_{k+1}}=\frac{2^k-1}{2^{k+1}-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4\times2^k-2}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3.2^k+2^k-2}$

$\ge\frac{1}{2}-\frac{1}{3}.\frac{1}{2^k}$，$k=1,2,\cdots,n$，

$\therefore \frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}$

$\ge\frac{n}{2}-\frac{1}{3}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n})$